

時域信號的照妖鏡-傅立葉轉換

連耀南

通訊系統的功能是將資訊從一端傳送到另一端。現代的電子通訊系統則是利用電子信號或光信號攜帶資訊在媒介中傳遞。電子信號在傳遞中受到電阻、外界干擾，漏失等影響會受到扭曲，以致接收端無法將信號「原音重現」。傳輸工程技術的目標則是要盡量將信號傳的又遠又快又好。很多人都隨身攜帶 MP3 播放器，而耳機線的長度不過數十公分，試想耳機線的長度如果有數千公尺之長，耳朵聽到的音樂會是什麼樣子？反觀我們日常中使用的電話系統，交談中的兩部電話之間相距少則數十公尺，多者可至數千公里，其中所使用的傳輸工程技術必然相當可觀。拋開長途光纖不論，單以家中到交換機房這段細細的銅線而論，所能提供的數位傳輸信號在 1970 年代也不過 0.3 Kbps，在 1980 年代進步到 9.6Kbps，現在則進步到 4Mbps 以上，這很多是拜傳輸工程技術進步之賜。

作為資訊人很幸福的享受寬頻通訊帶來的好處，但從事網路通訊的專業人員可就必須對傳輸技術具備相當的基礎知識才能克服很多技術障礙。在通訊技術中常常被用到而對資訊人員最為頭疼的術語之一就是 **frequency domain** 以及相關的傅立葉轉換 (**Fourier Transform**)，大部分資訊工程人員並未修過微分方程等工程數學，對傅立葉轉換常有雲山霧罩之感，本文嘗試做個簡單的介紹。

信號(**signal**)，是隨著某一參數變動的另一個參數值，在空氣中傳遞的聲音，就是隨著時間變動的壓力，在電子通訊系統中的信號就是隨著時間變動的電壓或電流，我們稱之為 **time domain signal**。在其他領域，例如影像，可能就是隨著空間而變的彩色變化。本文主要以 **time domain signal** 為例來說明。要處理信號首先要瞭解信號的特性，但第一個問題是如何描述一個信號的特性？如同要描述一個人的健康狀況，可以從身高、體重、血壓、心跳、以及一堆指數來描述。對於通訊系統而言，要採取什麼參數來描述一個信號最為方便？到目前為止，最常用的參數就是一個信號在各個頻率上的幅度，簡單的說，即是將一個信號的每一個頻率成分抽出來量度其大小並記錄下來，即所謂的 **frequency domain signal**。換句話說，一個 **time domain signal** 可以分解成很多不同頻率的正弦波。這個分解的動作，就可用傅立葉轉換來做。winamp 這個音樂播放程式

就可以選擇以 **time domain** 或 **frequency domain** 展現音樂的波形。大家可以試看看，就知道 **frequency domain signal** 是什麼樣子。

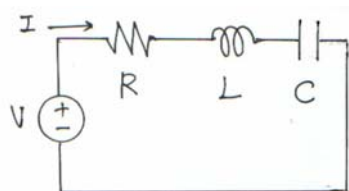
知道 **frequency domain** 是什麼東東之後，很多人心中還是有疑問：為何「頻率」這個參數這麼受歡迎？再者，**time domain signal** 轉換成 **frequency domain signal** 在數學上是怎麼回事？我們從三個面向來說明頻率分析為何如此受歡迎：

以聲音為例，人類對不同頻率的聲音本就有不同的感受 (**frequency sensitive**)。當我們說一個人的聲音很高亢，或很低沈，事實上就是頻率很高或很低；樂器，也是設計成可以發出各種不同頻率的聲音；音樂，是由各種不同頻率的聲音加上各種不同的變化所組成，為何人類對不同樂器發出的同音階的聲音感受不同？為何可以分辨不同人所發出的聲音？這就是因為不同的聲源在發出基本頻率的聲音之外，還發出不同倍頻的泛音出來，組成各自的音色，而偏偏人耳可以分辨不同頻率的聲音，因此，人耳對不同音色的同音階聲音感受不同，所以頻率本就是人類用來分析聲音的參數之一。如果我們將 **time domain signal** 轉換成 **frequency domain signal** 就可以容易配合人類的需求分析其特性，並加以運用，例如加強低音，或加強高音，或者變音等等。除了聲音之外，很多其他很多領域的信號，頻率也是重要參數之一。

同樣的，電子電路、導線及各種通訊媒介對於不同頻率的信號有不同的響應 (**frequency sensitive**)，以專業術語來說，即是非線性頻率響應 (**nonlinear frequency response**)，以通俗的話來說，頻率越高越麻煩，（有時對極低頻也很頭疼）。例如：喇叭之所以會發出不同頻率的聲音，是因為送進喇叭的電流在變化，而喇叭跟著震動造成變動的壓力波產生聲音，當頻率越高時，喇叭的震動就越跟不上。再以銅製導線傳遞電子信號為例，兩條導線之間很自然的形成電容（即所謂的寄生電容），而電容對於高頻信號阻抗很低，在銅線中傳遞的信號就從寄生電容中漏掉了，而傳不到接收端。所以銅導線在傳遞高頻信號時就像一條到處漏水的水管，而頻率越高漏得越嚴重。相同頻率的正弦波與方形波在導線中傳遞時，為何正弦波傳得比較好，而方形波就會傳得亂七八糟？很簡單，從 **frequency domain** 去看方形波，你會很驚訝的看到方形波是由很多不同頻率的正弦波所組成，其中含有很多很高頻率的成分，這些高頻部分在傳遞中途都漏掉了，到達接收端的信號早已大幅的走樣。所以數位信號不適合直接以方形波的形式放到長距離的導線中傳送（此即所謂的 **Baseband transmission**），而最好調制在一個較高頻的正弦波上，再送

出去(此即所謂的 **Broadband transmission**)，接收端接到之後，再解調回來得到原始數位信號。總之，因為電子電路的效能是 **frequency sensitive**，我們必須從頻率的觀點來看待信號，才能對症下藥，改善傳輸效能與品質。好比說，每個學生各有文理工商不同的性向，大學在招收學生時，不能全憑學測總分而必須看各科的表現才能挑選到合適的學生。

第三個原因是：二階的微分方程式之解正好是某一頻率的正弦波。而利用電容及電感兩個元件即可組成一個二階微分方程式，所以運用簡單的電路即可處理正弦波，例如頻率產生器及濾波器等。舉例而言，如果我們想要設計一個能產生某一個頻率的正弦波，我們可以利用計算好參數的電容及電感兩個元件組成一個電路（串聯或併聯），而這個電路的電路方程式（可利用克希荷夫定律求得）就是一個二階微分方程式，其解正好是所要的正弦波，其頻率由電感值與電容值決定。



$$V_R + V_L + V_C = V$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

where q is the charge across the capacitor

試想，現在隨便一顆 **PC** 裡所用的 **IC** 都至少有數百萬個電晶體才能做一件簡單的事，而早期的收音機裡的元件不過數十個，其中三級真空管（相當於電晶體）不過五到七個，就可以達到如此強大的功能。從頻率角度看待信號，好處多多。

再來談談 **time domain signal** 與 **frequency domain signal** 之間的轉換是怎麼回事。在數學上，**transform** (轉換) 其實是非常簡單而常見的概念。例如，對數其實就是一個簡單的轉換，其好處之一是把乘法變成加法。此外， $\sin(x)$, e^x

這些函數根本無法以人工用加減乘除計算求值，怎麼辦? 可以利用 **Taylor series** 轉換成多項式，就可以用人工計算求值。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{for all } x$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{for all } x$$

Fourier Transform 可將一段 time domain signal 轉換成 frequency domain signal, 也就是分解成各種不同頻率的正弦波。

有了傅立葉轉換這個工具，我們就可以很方便的分解或合成電子信號。語音辨識，就是比對語音的頻率特徵。早期的音效卡裡的電子合成音樂都是用正弦波產生器產生各種不同頻率的正弦波依比例合成的。電腦中的音效軟體可以很方便的製造各種聆聽環境效果，例如劇院、球場、音樂廳等。其他的應用多得不可勝數，幾乎是無限的可能。本文希望對有志從事網路通訊的資訊專業人員有點解惑的功能。相關技術可以很方便的上網搜尋，筆者的網頁也有簡單的說明：

<http://www.cs.nccu.edu.tw/~lien/NIISlide/BasicCom/index.html>

<http://www.cs.nccu.edu.tw/~lien/NIISlide/BasicCom/ee.htm>